2.1 Funktsiooni tuletise mõiste. Tuletise geomeetriline ja mehaaniline tõlgendus

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Fikseerime selle funktsiooni määramispiirkonnas ühe vabalt valitud punkti x. Lähtudes sellest fikseeritud väärtusest, suurendame argumenti x muudu Δx võrra. Argumendi muudu võrra erinevas punktis on argumendi väärtuseks $x + \Delta x$. Funktsiooni väärtus selles punktis on $f(x+\Delta x)$. Funktsiooni väärtus muutub $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ võrra. Suurust Δy nimetatakse argumendi muudule Δx vastavaks *funktsiooni muuduks.*

Definitsioon 1 Funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtust argumendi muudu lähenemisel nullile nimetatakse *funktsiooni tuletiseks* kohal x ja tähistatakse $f'(x)$.

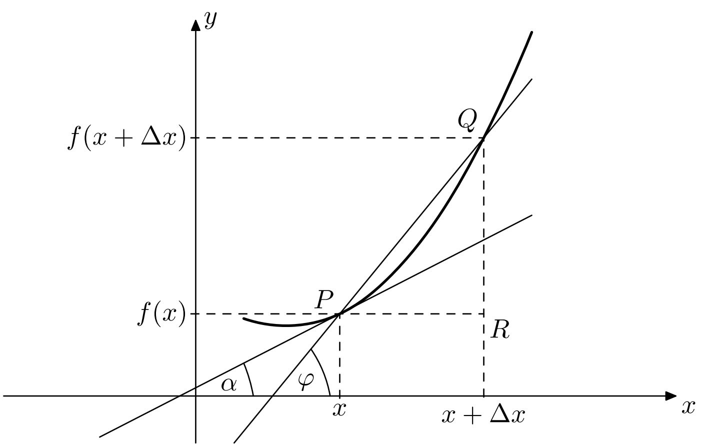
Seega definitsiooni kohaselt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Funktsiooni tuletist $f'(x)$ tähitatakse veel y'. Need on nn Newtoni tähistused. Peale selle on kasutusel Leibnizi tähistused $\dfrac{dy}{dx}$ ja $\dfrac{df}{dx}$.

Definitsioon 2 Funktsiooni, millel on olemas tuletis kohal x, nimetatakse *diferentseeruvaks* kohal x.

Tuletise geomeetriliseks tõlgenduseks vaatleme mingisugust funktsiooni $y = f(x)$ graafikut.



Joonis 2.1: tuletise geomeetriline tõlgendus

Argumendi väärtusele x vastab graafiku punkt P ja väärtusele $x + \Delta x$ punkt Q. Tõmbame läbi punktide P ja Q graafiku lõikaja. Lõikaja tõusunurga tähistame φ-ga. Täisnurkses kolmnurgas PRQ nurk tipu P juures on sel juhul samuti φ. Selle nurga vastaskaateti RQ pikkus on Δy ja lähiskaateti PR pikkus Δx. Seega

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

st funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhe tähendab lõikaja PQ tõusu. Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis $x + \Delta x \to x$, seega graafikul $Q \to P$ ja lõikaja PQ hakkab lähenema funktsiooni graafikule punktis P tõmmatud puutujale. Puutuja tõusunurk $\varphi \to \alpha$ ja funktsiooni tuletis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi = \tan\alpha$$

tähendab geomeetriliselt funktsiooni graafikule punktis abstsissiga x tõmmatud puutuja tõusunurga tangensit ehk puutuja tõusu.

Kui vaatleme muutujat x ajana, siis kirjeldab funktsioon $y = f(x)$ mingisugust ajas kulgevat protsessi, näiteks sirgjoonelist liikumist. Ajahetkel x on liikuv objekt punktis $f(x)$ ja ajahetkel $x + \Delta x$ punktis $f(x + \Delta x)$. Seega ajavahemiku Δx jooksul on objekt liikunud Δy võrra. Suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tähendab objekti keskmist liikumiskiirust ajavahemiku Δx jooksul. Mida väiksem on ajavahemik Δx, seda täpsemalt iseloomustab see keskmine kiirus objekti liikumiskiirust ajahetkel x. Seega piirväärtus Δx lähenemisel 0-le, st funktsiooni tuletis kohal x kujutab endast objekti liikumiskiirust ajahetkel x. See arutlus on üle kantav mistahes protsessile. Kui see protsess on kirjeldatav funktsiooniga $y = f(x)$, siis $f'(x)$ tähendab selle protsessi muutumiskiirust hetkel x.

2.2 Pidevus ja diferentseeruvus

Selle alampunkti eesmärgiks on näidata, et funktsiooni diferentseeruvusest antud punktis järeldub alati pidevus selles punktis ja et vastupidine väide ei kehti. Toome näite funktsioonist, mis antud punktis on pidev, kuid mitte diferentseeruv.

Teoreem 2.1. Kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv kohal x, siis on see ka pidev kohal x.

Tõestus. Olgu funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv kohal x, st $\exists\ f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Näitame, et kehtib funktsiooni pidevuseks tarvilik ja piisav tingimus. Selleks leiame

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = f'(x)\cdot 0 = 0,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Järgnev näide aga tähendab, et funktsiooni pidevusest diferentseeruvust ei järeldu. Vaatleme funktsiooni $y = |x|$ punktis $x = 0$. Selles punktis on funktsiooni muut $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$. Seega

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0,$$

st pidevuseks tarvilik ja piisav tingimus kohal $x = 0$ on täidetud. Leides aga ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

ja

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

näeme, et puudub piirväärtus $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$, st funktsioonil $y = |x|$ puudub tuletis kohal $x = 0$.

2.3 Mõnede põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

Selles alampunktis leiame definitsiooni (2.1) abil elementaarfunktsioonide tuletisi. Alustame konstantsest funktsioonint $y = c$. Siis $f(x) = c$ ja $f(x + \Delta x) = c$ ning $\Delta y = c - c = 0$. Konstandi tuletis $c' = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$. Siit saame esimese reegli: konstandi tuletis võrdub nulliga:

$$c' = 0.$$

Teiseks vaatleme naturaalarvulise astendajaga astmefunktsiooni $y = x^n$. Antud juhul $f(x) = x^n$, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ ja funktsiooni muut $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$.

Newtoni binoomvalemi abil

$$\begin{aligned}\Delta y = x^n + nx^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + \ \dots \ + \Delta x^n - x^n = \\ nx^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + \ \dots \ + \Delta x^n.\end{aligned}$$

Siit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + \ \dots \ + \Delta x^{n-1}.$$

ja

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1},$$

sest kõik liidetavad alates teisest sisaldavad Δx positiivse astendajaga astet. Teine tuletise leidmise reegel on seega:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{2.2}$$

Kolmandaks $y = \sqrt{x}$. Leiame funktsiooni muudu $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$ ja tuletise definitsiooni kohaselt

$$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Neljandaks $y = \dfrac{1}{x}$. Leiame funktsiooni muudu,

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

ja tuletise definitsiooni järgi

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}.$$

Viimased kaks näidet viitavad sellele, et astmefunktsiooni tuletise valem (2.2) kehtib mitte ainult naturaalarvulise astendaja korral vaid ka negatiivsete ja murruliste astendajate puhul.

Viiendaks $y = \sin x$. Leiame funktsiooni muudu $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x = \cos x \sin \Delta x - \sin x(1 - \cos \Delta x)$. Tuletise definitsiooni abil saame piirväärtuse omadusi kasutades, et

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \sin \Delta x - \sin x(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} - \frac{\sin x(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x} \right) = \\
&= \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = \\
&= \cos x - \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 - \cos \Delta x)(1 + \cos \Delta x)}{\Delta x(1 + \cos \Delta x)} = \\
&= \cos x - \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \Delta x}{\Delta x(1 + \cos \Delta x)} = \\
&= \cos x - \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{\sin \Delta x}{1 + \cos \Delta x} = \cos x - \sin x \cdot 0 = \cos x.
\end{aligned}$$

Seega

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

Samalaadsete teisenduste abil saab tuletise definitsioonist, et

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$$

Seitsmendaks leiame naturaallogaritmi $y = \ln x$ tuletise. Fikseerime funktsiooni määramispiirkonnas ühe argumendi väärtuse $x > 0$ ja leiame funktsiooni muudu $\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln \dfrac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$. Tuletise definitsiooni põhjal

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Argumendi väärtus $x > 0$ on fikseeritud ja $\Delta x \to 0$, seega $\dfrac{x}{\Delta x} \to \infty$ ja

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \lim_{\frac{x}{\Delta x} \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{\frac{x}{\Delta x} \to \infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Ülejäänud põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised leiame järgmistes alampunktides.

2.4 Diferentseerimisreeglid

Funktsiooni tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni diferentseerimiseks, diferentseerimisreeglid on tuletise leidmise reeglid.

Olgu meil antud kaks funktsiooni $u = u(x)$ ja $v = v(x)$, mille kohta eeldame, et mõlemad on diferentseeruvad kohal x.

Teoreem 4.1. Funktsioonide summa tuletis on võrdne nende funktsioonide tuletiste summaga:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x).$$

Tõestus. Tähistame summa $y(x) = u(x) + v(x)$. Siis

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - [u(x) + v(x)] = \\ &= u(x+\Delta x) - u(x) + v(x+\Delta x) - v(x) = \Delta u + \Delta v\end{aligned}$$

ja piirväärtuse omaduste tõttu

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Teoreem 4.2. Funktsioonide korrutise tuletis on

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Tõestus. Tähistame korrutise $y(x) = u(x)v(x)$. Siis

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)]v(x+\Delta x) + u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)] = \\ &= \Delta u \cdot v(x+\Delta x) + u(x)\Delta v.\end{aligned}$$

Piirväärtuse omaduste tõttu

$$\begin{aligned}y'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x+\Delta x) + u(x)\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Eelduse kohaselt on funktsioon $v(x)$ diferentseeruv kohal x. Teoreemi 2.1 põhjal on $v(x)$ ka pidev kohal x. Seega pidevuse kolmandast tingimusest $\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$. Järelikult $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = x\sin x + \cos x$ tuletise

$$\begin{aligned}y' &= (x\sin x + \cos x)' = (x\sin x)' + (\cos x)' = \\ &= x'\sin x + x(\sin x)' - \sin x = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x.\end{aligned}$$

Järeldus 4.3. Konstantse teguri saab tuua tuletise märgi alt välja:

$$[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x).$$

Tõepoolest teoreemi 4.2 põhjal $[c \cdot u(x)]' = c' \cdot u(x) + c \cdot u'(x) = c \cdot u'(x)$.

Selle järelduse abil saame järjekordse põhilise elementaarfunktsiooni $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ tuletise, kasutades selleks logaritmide aluse mutmise valemit $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Saame

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Seega

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.}$$

Järeldus 4.4. Kahe funktsiooni vahe tuletis on võrdne nende funktsioonide tuletiste vahega:

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x).$$

Põhjenduseks piisab, kui kirjutame kõigepealt teoreemi 4.1 ja seejärel järelduse 4.3 põhjal, et $[u(x) - v(x)]' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [(-1)v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Teoreem 4.5. Jagatise tuletis on

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

eeldusel, et $v(x) \neq 0$.

Tõestus. Tähistame jagatise

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Siis $u(x) = y(x)v(x)$ ja korrutise tuletise leidmise reegli põhjal

$$u'(x) = y'(x)v(x) + y(x)v'(x),$$

millest

$$y'(x) = \frac{u'(x) - y(x)v'(x)}{v(x)}.$$

Asendades $y(x)$ jagatisega, saame

$$y'(x) = \frac{u'(x) - \dfrac{u(x)v'(x)}{v(x)}}{v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Teoreemi 4.5 abil leiame funktsiooni $y = \tan x$ tuletise

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Seega

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Sama hõlpus on teoreemi 4.5 abil näidata, et

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

2.5 Pöördfunktsiooni tuletis

Olgu antud ühene funktsioon $y = f(x)$, millel on olemas ühene pöördfunktsioon $x = \varphi(y)$.

Teoreem 5.1. Kui funktsioonil $y = f(x)$ on kohal x tuletis $f'(x) \neq 0$, siis pöördfunktsiooni tuletis

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Tõestus. Pöördfunktsiooni argumendiks on y, st

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Eelduse kohaselt on funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv kohal x, järelikult teoreemi 2.1 põhjal ka pidev kohal x. Pideva funktsiooni pöördfunktsioon $x = \varphi(y)$ on samuti pidev vastaval kohal y, st sellest, et $\Delta y \to 0$ järeldub, et ka $\Delta x \to 0$. Siit saame, et

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

mida oli vaja tõestada.

Kuigi pöördfunktsioon ja pöördväärtus on kaks täiesti erinevat mõistet, on nüüd selgunud, et läbi tuletise on nad ometi seotud: *pöördfunktsiooni tuletis on antud funktsiooni tuletise pöördväärtus.*

Loomulikult kehtib ka vastupidine. Antud funktsiooni tuletis on pöördfunktsiooni tuletise pöördväärtus:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{2.3}$$

Sellise kujul hakkame teoreemi 5.1 kasutama. Alustame funktsioonist $y = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$. Selle pöördfunktsioon on $x = \log_a y$ ja (2.3) järgi

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Seega

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Arvestades sellega, et $\ln e = 1$, saame

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Edasi leiame funktsiooni $y = \arcsin x$ tuletise. Selle pöördfunktsioon on $x = \sin y$ ja (2.3) põhjal

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Seega

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Et $\forall\, x \in [-1; 1]$ korral $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, siis $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$ ja arvestades sellega, et $\dfrac{\pi}{2}$ on konstant, saame

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Järgmiseks leiame funktsiooni $y = \arctan x$ tuletise. Selle pöördfunktsioon on $x = \tan y$ ja (2.3) põhjal

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Seega

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Kasutades seost $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$, saame

$$\boxed{(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}}$$

2.6 Liitfunktsiooni tuletis

Liitfunktsiooni $y = f[\varphi(x)]$ kaheks komponendiks on $y = f(u)$ ja $u = \varphi(x)$.

Teoreem 5.2. Kui $u = \varphi(x)$ on diferentseeruv kohal x ja $y = f(u)$ diferentseeruv vastaval kohal u, siis liitfunktsioon $y = f[\varphi(x)]$ on diferentseeruv kohal x ja

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)]\varphi'(x). \tag{2.4}$$

Tõestus. Tähistame liitfunktsiooni $F(x) = f[\varphi(x)]$. Siis $y = F(x)$ ja

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Funktsioon $u = \varphi(x)$ on diferentseeruv kohal x, järelikult teoreemi 2.1 põhjal ka pidev kohal x. Pidevuseks tarvilik ja piisav tingimus on täidetud, seega sellest, et $\Delta x \to 0$ järeldub, et $\Delta u \to 0$ ja

$$F'(x) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x),$$

mida oligi funktsiooni $F(x)$ ja muutuja u tähendust arvestades tarvis tõestada.

Võrdus (2.4) on liitfunktsiooni diferentseerimise reegel. Leiame selle reegli abil üldise astmefunktsiooni $y = x^\alpha$, kus $x > 0$, tuletise. Selleks esitame funktsiooni

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

ja kirjutame (2.4) põhjal

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Seega igasuguse reaalarvulise astendaja α korral

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Arvestades sellega, et

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x},$$

saame

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$

ehk

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.}$$

Samal viisil

$$\boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.}$$

Jagatise tuletise leidmise reegli abil leiame

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Seega

$$\boxed{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}$$

ja samuti on jagatise tuletise leidmise reegli abil hõlpus näidata, et

$$\boxed{(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.}$$

2.7 Logaritmiline diferentseerimine

Logaritmilise diferentseerimise võtet tuleb kasutada eelkõige funktsioonide $y = [f(x)]^{g(x)}$ korral, st kui funktsioonis on muutuv suurus muutuval astmel. Astmefunktsiooni puhul peab astendaja olema konstantne, eksponentfunktsiooni puhul aga alus konstantne. Seega antud funktsiooni tuletise leidmiseks ei saa kasutada kumbagi valemit.

Logaritmimine võimaldab teisendada funktsiooni nii, et seda on võimalik diferentseerida olemasolevaid reegleid kasutades. Nimelt

$$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$

ja $[f(x)]^{g(x)}$ on teisenenud korrutiseks, milles teine tegur on liitfunktsioon $\ln f(x)$. Seda diferentseeritakse korrutise tuletise leidmise reeglit ja liitfunktsiooni tuletise leidmise reeglit rakendades. Muutuja y on x funktsioon, seega vasak pool $\ln y$ on liitfunktsioon ja selle tuletis avaldub standardsel kujul

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} y'.$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = (x^2 + 1)^x$ tuletise. Selleks kõigepealt logaritmime

$$\ln y = x \ln(x^2 + 1)$$

ja siis diferentseerime

$$\frac{1}{y} y' = \ln(x^2 + 1) + x \frac{1}{x^2 + 1} 2x$$

ehk

$$\frac{1}{y}y' = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

Korrutades saadud võrduse mõlemaid pooli suurusega y, saame

$$y' = y\left(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right)$$

ja pärast y asendamist

$$y' = (x^2+1)^x\left(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right).$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = \dfrac{x^3\sqrt{x-1}}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$ tuletise.

Selle funktsiooni tuletist on võimalik leida ka logaritmilise diferentseerimise võtteta, aga logaritmimine oluliselt hõlbustab diferentseerimist. Kasutades logaritmide omadusi, leiame

$$\ln y = \ln\frac{x^3\sqrt{x-1}}{\sqrt[5]{(x+3)^2}} = 3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{5}\ln(x+3)$$

ja seejärel diferentseerime

$$\frac{1}{y}y' = 3\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Korrutades võrduse mõlemaid pooli suurusega y, saame

$$y' = y\left[\frac{3}{x} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{5(x+3)}\right]$$

ehk pärast y asendamist

$$y' = \frac{x^3\sqrt{x-1}}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}\left[\frac{3}{x} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{5(x+3)}\right]$$

2.8 Ilmutamata funktsiooni tuletis

Ilmutamata funktsiooni tuletise leidmiseks üks võimalus on funktsiooni ilmutamine, st funktsiooni teisendamine kujule $y = f(x)$ ja selle diferentseerimine olemasolevate reeglite abil.

Tavaliselt on aga ilmutamata kujul esitatud funktsioonid mitmesed, seega tuleks pärast ilmutamist diferentseerida iga ühest haru eraldi. Paljudel juhtudel aga osutub funktsiooni ilmutamine küllaltki komplitseerituks või hoopis võimatuks.

Vaatleme ilmutamata funktsiooni diferentseerimist näidete varal.

Näide 1. Leiame y', kui $x^2 + y^2 = r^2$. Selleks diferentseerime esitatud võrduse mõlemaid pooli muutuja x järgi, arvestades sellega, et y^2 on liitfunktsioon: y on x funktsioon ja ruutfunktsioon on omakorda y funktsioon. Paremal pool võrdusmärki on konstant, seega diferentseerimise tulemuseks saame

$$2x + 2y \cdot y' = 0.$$

Pärast y' avaldamist

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Kui esmalt funktsioon ilmutada, saame kahese funktsiooni $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Diferentseerides esimest ühest haru $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, saame

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Diferentseerides teist ühest haru $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, saame

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{-\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Mõlemal juhul klapib tulemus ilmutamata kujust leitud tuletisega.

Näide 2. Leiame y', kui $\sin(x + y) + \cos(xy) = 0$.

Võrduse vasakul pool on kaks liitfunktsiooni. Esimeses on väliseks funktsiooniks siinus ja seesmiseks $x + y$, teises väliseks funktsiooniks koosinus ja seesmiseks xy. Arvestades sellega, et y on x funktsioon, leiame võrduse mõlemalt poolt tuletise x järgi,

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') - \sin(xy) \cdot (y + xy') = 0.$$

Pärast sulgude avamist saame

$$\cos(x + y) + y' \cos(x + y) - y \sin(xy) - xy' \sin(xy) = 0$$

ehk

$$y' [\cos(x + y) - x \sin(xy)] = y \sin(xy) - \cos(x + y),$$

millest

$$y' = \frac{y \sin(xy) - \cos(x + y)}{\cos(x + y) - x \sin(xy)}.$$

2.9 Parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni tuletis

Olgu funktsioon esitatud parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Eeldme, et mõlemad parameetri t funktsioonid on ühesed ja diferentseeruvad, et x tuletis t järgi $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ja et funktsioonil $x = \varphi(t)$ eksisteerib ühene pöördfunktsioon $t = \Phi(x)$.

Muutuja y on muutja suhtes x liitfunktsioon

$$y = \psi[\Phi(x)]$$

ja liitfunktsiooni diferentseerimise reegli kohaselt

$$\frac{dy}{dx} = \psi'[\Phi(x)] \cdot \Phi'(x) \tag{2.5}$$

Pöördfunktsiooni tuletise leidmise reegli järgi

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Kasutades tähistusi $\psi'[\Phi(x)] = \psi'(t) = \frac{dy}{dt}$, saame võrdusest (2.5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Matemaatilises analüüsis tähistatakse tuletist parameetri järgi

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

mida loetakse "x-täpp"ja

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y},$$

mida loetakse "y-täpp". Kokkuvõttes saame parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni tuletise leidmise reegli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{2.6}$$

Näide 1. Eelmises alampunktis vaadeldud ilmutamata funktsiooni $x^2+y^2 = r^2$ esitus parameetrilisel kujul on

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t. \end{cases}$$

Leides mõlema funktsiooni tuletised parameetri järgi, saame $\dot{x} = -r\sin t$ ja $\dot{y} = r\cos t$ ning parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni tuletise leidmise reegli (2.6) abil saame tulemuse

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r\cos t}{r\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t},$$

mis langeb kokku alampunktis 2.8 sama funktsiooni ilmutamata kujust leitud tuletisega.

Näide 2. Leiame tsükloidi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

puutuja tõusu punktis, milles parameetri väärtus $t = \frac{\pi}{2}$.

Joone (funktsiooni graafiku) puutuja tõus antud punktis on võrdne funktsiooni tuletise väärtusega selles punktis. Seega tuleb leida tuletise väärtus punktis, milles parameeter $t = \frac{\pi}{2}$. Selleks leiame $\dot{x} = a(1-\cos t)$ ja $\dot{y} = a\sin t$ ning (2.6) abil

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Tuletise väärtus punktis, kus $t = \frac{\pi}{2}$, on

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Järelikult tsükloidi puutuja tõus punktis, mis vastab parameetri väärtusele $t = \frac{\pi}{2}$, võrdub 1-ga.

2.10 Funktsiooni diferentsiaal

Paljudel juhtudel on väikeste argumendi muutude korral piisav, kui eraldada funktsiooni muudust välja selle lineaarne osa. Lineaarse funktsiooni käsitlemine on alati oluliselt lihtsam.

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Selle tuletis kohal x on defineeritud kui

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Sellisel juhul muutuv suurus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ avaldub kui

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

kus α on piirprotsessis $\Delta x \to 0$ lõpmatult kahanev suurus. Korrutades viimase võrduse mõlemaid pooli argumendi muuduga Δx, saame

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \tag{2.7}$$

Võrduse (2.7) paremal pool on esimene liidetav fikseeritud x väärtuse korral lineaarne Δx suhtes, teine liidetav aga kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, kui Δx, sest

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = 0$$

Definitsioon 1. Funktsiooni muudu avaldise (2.7) lineaarset osa $f'(x)\Delta x$ ninetatakse *funktsiooni diferentsiaaliks* ja tähistatakse dy.

Seega definitsiooni kohaselt

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Kui funktsioon ja argument langevad ühte, st $y = x$, siis $y' = 1$ ja $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$. Järelikult sõltumatu muutuja x korral $dx = \Delta x$, st sõtlumatu muutuja jaoks langevad diferentsiaali ja muudu mõisted kokku. Järelikult saame funktsiooni diferentsiaali avaldiseks

$$dy = f'(x)dx \tag{2.8}$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = \arctan \sqrt{x}$ diferentsiaali avaldise.

Liitfunktsiooni tuletise leidmise reegli kohaselt

$$y' = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ja (2.8) järgi

$$dy = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

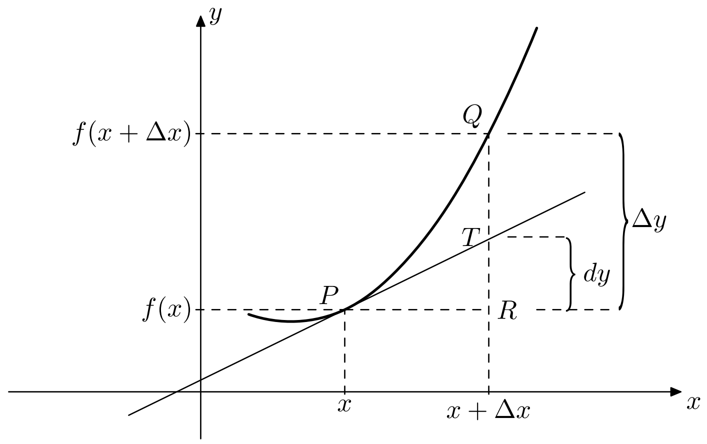
Näide 2. Arvutame funktsiooni $y = x^2$ muudu ja diferentsiaali väärtused, kui argument x muutub väärtusest 1 väärtuseni $1,05$.

Leiame funktsiooni muudu

$$\Delta y = 1,05^2 - 1^2 = 0,1025.$$

Argumendi muut ehk diferentsiaal on $dx = \Delta x = 0,05$ funktsiooni tuletis $y' = 2x$ ja diferentsiaali väärtus seega $dy = 2 \cdot 1 \cdot 0,05 = 0,1$

Uurime, mida tähendab funktsiooni diferentsiaal geomeetriliselt. Funktsiooni



Joonis 2.2: funktsiooni diferentsiaal

tuletis tähendab funktsiooni graafikule punktis P (abstsissiga x) tõmmatud puutuja tõusu ehk tõusunurga tangensit. Korrutis $f'(x)dx$ tähendab täisnurkse kolmnurga PRT kaatetit RT ehk funktsiooni diferentsiaaliks on lõigu RT pikkus.

Järelikult näitab diferentsiaali arvuline väärtus, kui palju muutub y argumendi x muutudes Δx võrra, kui liikumine mööda joont on asendatud liikumisega mööda joone puutujat.

Mehaaniliselt on kiirus muutuv suurus. Kui fikseerida kiirus ühes punktis ja jätkata liikumist selle kiirusega, siis diferentsiaal näitab, kui pika vahemaa läbib liikuv objekt selle konstantse kiirusega ajavahemiku Δx jooksul.

Kui Δx on piisavalt väike, siis arvestades sellega, et Δy erineb diferentsiaalist dy suuruse võrra, mis on Δx suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, võime kirjutada $\Delta y \approx dy$. Funktsiooni muudu ja diferentsiaali definitsiooni kohaselt

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

millest saame ligikaudse valemi

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{2.9}$$

Valem (2.9) on rakendatav ainult suhteliselt väikeste argumendi muutude Δx korral.

Näide 3. Arvutame valemi (2.9) abil $\ln 0,9$ ligikaudse väärtuse.

Siin valime $x = 1$, $\Delta x = -0,1$ ja funktsiooni $f(x) = \ln x$. Funktsiooni tuletis $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, funktsiooni väärtus $f(1) = \ln 1 = 0$ ja tuletise väärtus $f'(1) = 1$.

Seega valemi (2.9) järgi saame väärtuse

$$\ln 0,9 \approx 0 + 1 \cdot (-0,1) = -0,1,$$

mis erineb tegelikust väärtusest vähem kui $0,0054$ võrra.

2.11 Kõrgemat järku tuletised

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletis $f'(x)$ on mingisugune muutuja x funktsioon ja seda on omakorda võimalik diferentseerida.

Definitsioon 1. Funktsiooni $y = f(x)$ teist järku tuletiseks $f''(x)$ nimetatakse funktsiooni tuletise tuletist:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Teist järku tuletist tähistatkse veel y''. Leibnizi tähistuses

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

või $\dfrac{d^2f}{dx^2}$

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = e^{-x^2}$ teist järku tuletise.

Kõigepealt leiame $y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$ ja seejärel

$$y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $y = f(x)$ n-ndat järku tuletiseks $f^{(n)}(x)$ nimetatakse selle funktsiooni $n - 1$ järku tuletise tuletist:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Leibnizi tähistuses

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = \sin x$ n-ndat järku tuletise.

Kasutame selleks matemaatilise induktsiooni meetodit. Induktsiooni oletuse tegemiseks esitame mõned tuletise järgud taandamisvalemite abil

$$\begin{aligned}
y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
y'' &= -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \\
y''' &= -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \\
y^{(4)} &= \sin x = \sin(x+2\pi) = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Nende põhjal teeme oletuse $y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. Oletuse õigsust kontrollime $n+1$ järku tuletise

$$y^{(n+1)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

leidmisega.

2.12 Joone puutuja ja normaali võrrandid

Selles alampunktis mõeldakse joone all funktsiooni $y = f(x)$ graafikut. Eesmärgiks on tuletada joone puutuja ja normaali võrrandid antud punktis.

Lähtume tuntud faktist, et kui sirge läbib punkti $P_0(x_0; y_0)$ ja sirge tõus on k, siis sirge võrrand on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku punkti, mille abstsiss on x_0, ordinaadiks on $f(x_0)$. Puutuja tõus selles punktis on $f'(x_0)$. Seega on puutuja võrrandiks

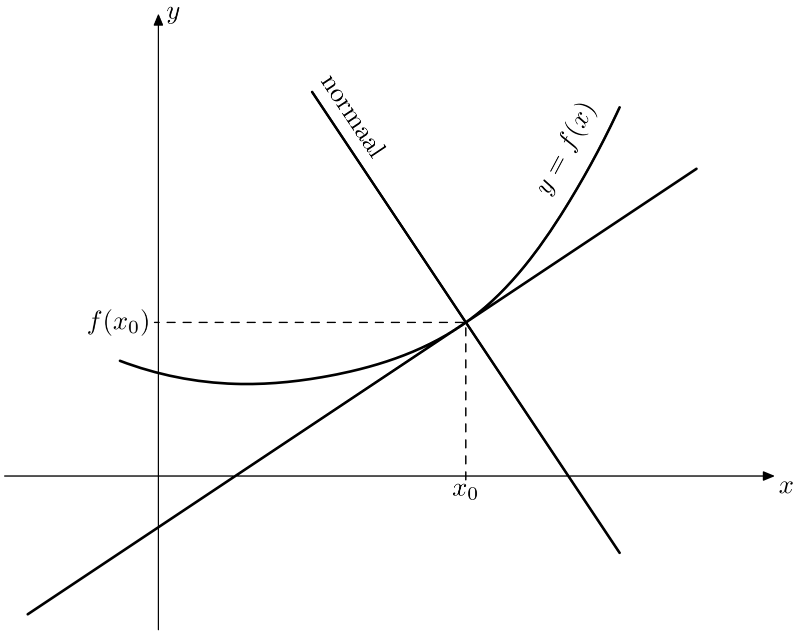
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.10}$$

Definitsioon. Joone normaalsirgeks ehk normaaliks antud punktis nimetatakse joone selles punktis tõmmatud puutuja ristsirget.

Kui kaks sirget on risti, siis teise sirge tõus k_2 avaldub esimese sirge tõusu k_1 kaudu $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Järelikult on normaali tõusuks $-\frac{1}{f'(x_0)}$ ja normaalsirge võrrandiks

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2.11}$$

Näide. Koostame joone $y = \cos x$ puutuja ja normaali võrrandid punkis abstsissiga $x_0 = \frac{\pi}{6}$.



Joonis 2.3: joone puutuja ja normaal

Antud juhul $f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tuletise $f'(x) = -\sin x$ abil leiame puutuja tõusu $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ja normaali tõusu $-\frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})} = 2$.

Puutuja võrrandiks (2.10) saame

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ehk

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}.$$

Puutuja võrrandis on algordinaadi ligikaudseks väärtuseks $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12} \approx 1,128$.

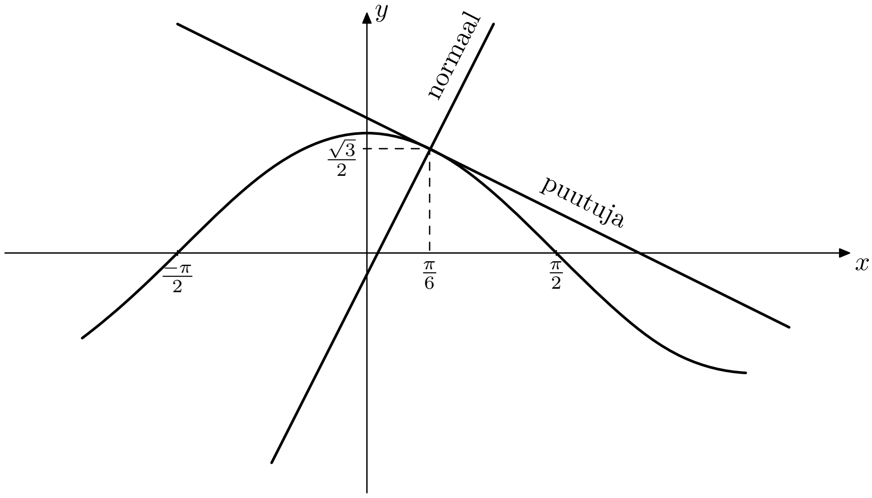
Normmali võrrandiks (2.11) saame

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ehk

$$y = 2x + \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6}.$$

Normaali võrrandis on algordinaadi ligikaudseks väärtuseks $\dfrac{3\sqrt{3}-2\pi}{6} \approx -0,181$.



Joonis 2.4: funktsiooni $y = \cos x$ puutuja ja normaal punktis abstsissiga $\dfrac{\pi}{6}$